Lust an Mathematik?

Peter Hiemann, Grasse

Ich hatte meinem 14-jährigen Enkel versprochen, mir etwas einfallen zu lassen, wie er in der Schule die Lust an mathematischen Studien am ehesten kennenlernen kann.

Es wird nicht angenommen, dass mit ein paar einfachen Lehrmeinungen motivierende Wirkung erzielt werden kann. Ein paar mathematische Denkweisen in einen größeren Rahmen darzustellen, hilft vielleicht am ehesten, auf einen interessanten Wissensbereich neugierig zu machen. In der Hoffnung, dass ein paar ausgewählte Studien so etwas wie Lust an strukturierten Gedankengängen erwecken können.

Zwei grundlegende Motivationen sind für alle Lernprozesse wesentlich, aber für das Begreifen mathematischer Gedankengebäude offensichtliche Voraussetzung:

- man möchte Gründe und Bedingungen verstehen, die für eine Problemsituation maßgebend sind: Was funktioniert oder funktioniert nicht, und warum oder warum nicht?

- man möchte verstehen, was nach einer existierenden Situation als nächste Situation in Frage kommt: Wie funktioniert etwas, und welche Zustände sind möglich?

'Natürliche' Verhältnisse

Der vertraute Satz $a^2 + b^2 = c^2$, der für die Seitenlängen a, b, c (mit c als Hypotenuse) aller rechtwinkliger Dreiecke gilt, wurde nicht von Pythagoras entdeckt. Vielmehr widmeten sich die Pythagoreer harmonischen Zuständen in der Natur und speziell den gleichmäßigen Kreisbewegungen der Himmelskörper als Manifestation einer göttlichen Weltlenkung. Unter anderem waren sie überzeugt, dass sich harmonische Verhältnisse mittels Quotienten ganzer Zahlen (rationale Zahlen) darstellen ließen.

Diese grundlegende Annahme für harmonische Verhältnisse musste später aufgegeben werden, als sich herausstellte, dass die Länge der Diagonale in einem Quadrat nicht durch ein Verhältnis ganzer Zahlen errechnet werden kann. Um die Länge der Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 zu bestimmen, kommt man nicht umhin, die Quadratwurzel aus der Zahl 2 zu errechnen. Diese Quadratwurzel ist eine irrationale Zahl, weil sie nicht durch einen Quotienten ganzer Zahlen errechnet werden kann.

Wer heute Mathematik mit natürlichen (ganzen) Zahlen betreiben möchte, widmet sich dem interessanten Feld der Zahlentheorie.

Hier sei auf ein paar 'natürliche' Verhältnisse hingewiesen, die mit der Entdeckung mathematischer und physikalischer Konstanten zusammenhängen. Die Geschichte und Herleitung wichtiger mathematischer Konstanten hält für mathematisch Interessierte viele Überraschungen bereit.

Beispiele wichtiger mathematischer Konstanten

Die Goldene Zahl Φ

Als Goldener Schnitt wird das Teilungsverhältnis einer Strecke bezeichnet, bei dem das Verhältnis des Ganzen zu seinem größeren Teil (auch Major genannt) dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil (dem Minor) entspricht. Als Formel ausgedrückt (mit a als Major und b als Minor) gilt:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

Die Goldene Zahl Φ (Phi) errechnet sich also als ein Teilungsverhältnis von Strecken, die ihrerseits in einem besonderen Verhältnis zueinander stehen. Die Goldene Zahl Φ (Phi) ist eine irrationale Zahl. Die Dezimalbruchentwicklung der Goldenen Zahl beginnt mit

$$\Phi = 1{,}618 \ldots$$

Die Goldene Zahl kann auch durch einen Folge ganzer Zahlen hergeleitet werden – den Fibonacci-Zahlen:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Jede Zahl der Folge nach der ersten 1 ist die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen weisen einige bemerkenswerte mathematische Besonderheiten auf: Aufgrund der Beziehung zur vorherigen und zur folgenden Zahl scheint Wachstum in der Natur einem Additionsgesetz zu folgen. Je weiter man in der Folge fortschreitet, desto mehr nähert sich der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen dem Goldenen Schnitt (1,618033…) an 13:8=1,6250; 21:13=1,6154; 34:21=1,6190; 55:34=1,6176; etc). Diese Annäherung ist alternierend, d. h. die Quotienten sind abwechselnd kleiner und größer als die Goldene Zahl.

Überlegungen zu Bedeutungen des goldenen Schnitts hat eine lange Geschichte. Es ist überraschend, dass es für künstlerische und sogar biologische Überlegungen Bedeutung hat. Unerwartete Bedeutungen der Zahl Φ (Phi) sind zusammengestellt in einem Wikipedia Eintrag: https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt

Die Kreiszahl π

Die Kreiszahl π (Pi) ist eine mathematische Konstante, die als Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser definiert ist. Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Größe des Kreises. π ist auch eine irrationale Zahl. Tatsächlich ist die Zahl π sogar transzendent, was bedeutet, dass es kein Polynom mit rationalen Koeffizienten gibt, das π als eine Nullstelle hat. Die Zahl π kommt in zahlreichen Teilgebieten der Mathematik, auch außerhalb der Geometrie, vor. Die Dezimalbruchentwicklung der Kreiszahl beginnt mit

$$\pi = 3{,}141\,5926 \ldots$$

Die Berechnung der Zahl π hat eine lange interessante Geschichte. Große Mathematiker haben überraschende Herleitungen gefunden, die sich aus ganzen Zahlen ergeben.

Gottfried Wilhelm Leibniz 1682:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots\ldots$$

Leonhard Euler 1748:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \ldots\ldots$$

Andere unerwartete Herleitungen und Bedeutungen der Zahl π sind zusammengestellt in einem Wikipedia Eintrag: https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl

Die Eulersche Zahl e

Die Zahl ist nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler benannt. Sie ist auch eine irrationale und sogar transzendente Zahl. Die Eulersche Zahl spielt in der gesamten Analysis und allen damit verbundenen Teilgebieten der Mathematik, besonders in der Differential- und Integralrechnung, eine zentrale Rolle. Sie gehört zu den wichtigsten Konstanten der Mathematik.

Unter der Zahl e ist nach Leonhard Euler der Grenzwert der folgenden unendlichen Reihe zu verstehen:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Die Dezimalbruchentwicklung der Eulerschen Zahl beginnt mit

$$e = 2{,}71828 \ldots$$

Euler hat auch eine Beziehung gefunden, die als Eulerschen Identität bezeichnet wird:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Die Überraschung ist perfekt, Euler setzt fundamentale mathematische Konstanten in einen unerwarteten Zusammenhang: Die ganze Zahl 1, die Eulersche Zahl e, die imaginäre Einheit i der komplexen Zahlen und die Kreiszahl π.

Weitere Überraschungen der Zahl e sind zusammengestellt in einem Wikipedia Eintrag: https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl

Beispiele wichtiger physikalischer Konstanten

Gravitationskonstante G

Die Gravitationskonstante G ist die fundamentale Naturkonstante, die die Stärke der Gravitation bestimmt. In dem Gravitationsgesetz nach Isaac Newton ergibt sie direkt die Stärke der Gravitationskraft zwischen zwei Körpern in Abhängigkeit von ihrem Abstand und ihren Massen.

Nach dem newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei kugelsymmetrische Körper mit den Massen m_1 und m_2, deren Mittelpunkte einen Abstand r haben, gegenseitig mit der Kraft

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

an. Die in der Gleichung auftretende Proportionalitätskonstante G ist die Gravitationskonstante. In der allgemeinen Relativitätstheorie nach Albert Einstein bestimmt sie die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit und damit den Ablauf aller mit der Gravitation zusammenhängenden Erscheinungen. Für die Beschreibung astronomischer Größen und Vorgänge besitzt sie fundamentale Bedeutung.

Verglichen mit anderen Wechselwirkungen (Grundkräften) der Physik ist die Gravitation eine sehr schwache Wechselwirkung, was sich in dem kleinen Wert der Gravitationskonstanten ausdrückt.

Lichtgeschwindigkeit c

'Normalerweise' ist bei Geschwindigkeitsmessungen zu berücksichtigen, dass ein beobachtetes Objekt und der Beobachter sich relativ zueinander bewegen. Die Lichtgeschwindigkeit jedoch ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle. Nach dem Relativitätsprinzip der Physik hängt die Lichtgeschwindigkeit ebenso wenig vom Bewegungszustand des zu ihrer Messung verwendeten Empfängers ab. Daraus entwickelte Albert Einstein die Relativitätstheorie. Sie besagt unter anderem, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit eine unüberwindbare Geschwindigkeitsgrenze für die Bewegung von Masse und die Übertragung von Energie und Information im Universum darstellt. Teilchen ohne Masse, wie die Photonen, bewegen sich stets mit dieser Grenzgeschwindigkeit, alle Masse behafteten Teilchen stets langsamer. Als Folge der speziellen Relativitätstheorie verbindet die Naturkonstante c die vorher unabhängigen Konzepte Energie E und Masse m in der Äquivalenz von Masse und Energie

$$E = m \cdot c^2 \ .$$

Ort und Zeit werden durch c zur Raumzeit zusammengefasst und durch den Viererverktor (ct, x, y, z) in einem vierdimensionalen Raum beschrieben.

Wirkungsquantum h

Das Plancksche Wirkungsquantum, oder die Planck-Konstante h ist das Verhältnis von Energie E und Frequenz f eines Photons, entsprechend der Formel

$$E = h \cdot f .$$

Die Entdeckung des Wirkungsquantums durch Max Planck in den Jahren 1899 und 1900 begründete die Quantenphysik. Das Wirkungsquantum verknüpft Eigenschaften, die vorher in der klassischen Physik entweder nur Teilchen oder nur Wellen zugeschrieben wurden. Damit ist es die Basis des Welle-Teilchen-Dualismus der modernen Physik.

Die Gravitationskonstante G, die Lichtgeschwindigkeit c und das Wirkungsquantum h bilden die Grundlage eines später definierten natürlichen Einheitensystems der sogenannten Planck-Einheiten. Max Planck hatte bereits die Definition von Maßeinheiten vorgeschlagen, die „unabhängig von speziellen Körpern oder Substanzen ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten und […] daher als ‚natürliche Maßeinheiten' bezeichnet werden können." Die heute verwendeten Planck-Einheiten für Länge und Zeit markieren eine Grenze, hinter der die bisher bekannten physikalischen Gesetze nicht mehr anwendbar sind, z. B. bei der theoretischen Aufklärung der Vorgänge kurz nach dem Urknall.

Physikalische Naturkonstanten werden von Physikern festgelegt. Anders als die Herleitung mathematische Konstanten ist die Bestimmung physikalischer Konstanten von den verfügbaren Messmethoden abhängig. Sie lassen sich nur mit begrenzter Genauigkeit angeben.

Es stellte sich heraus, dass die Vielzahl der bekannten Naturkonstanten außerordentlich fein 'abgestimmt' sind, um den physikalischen Zustand des beobachtbaren Universums zu erklären. Physiker glauben zwar nicht mehr an die von Pythagoras angenommene Harmonie in der Natur. Sie orientieren sich jedoch bei philosophischen Überlegungen an dem sogenannten 'Anthropischen Prinzip' . Dieses Prinzip besagt, dass das beobachtbare Universum nur deshalb beobachtbar ist, weil es alle Eigenschaften hat, die dem Beobachter ein Leben ermöglichen. Wäre das Universum nicht für die Entwicklung bewusstseinsfähigen Lebens geeignet, so wäre auch niemand da, der es beschreiben könnte. Wollen Physiker damit auf ihre Weise sagen, dass der Mensch als auserwähltes Wesen seine Existenz 'göttlicher Weltlenkung' verdankt?

Analytische Verfahren

Die Geschichte über die Herleitung und die Bedeutung wichtiger mathematischer Konstanten zeigt eine Vielfalt mathematischer Verfahren, die sich Mathematiker haben einfallen lassen. 'Reine' Mathematiker betreiben 'reine Mathematik'. Sie widmen sich vielfältigen abstrakten Elementen, Regeln und Strukturen. Physiker machen den wohl intensivsten Gebrauch von komplexen mathematischen Verfahren. Für alle anderen Bereiche, bei denen es auf analytische Fähigkeiten ankommt, ist es meistens ausreichend, sich mit einigen analytischen Verfahren der Mathematik vertraut zu machen.

Funktionen

Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu:

$$f : D \rightarrow Z \text{ , } x \mapsto y \text{ .}$$

Für das dem Element $x \in D$ (x in D) zugeordnete Element der Zielmenge schreibt man im Allgemeinen f (x).

Mittels des fundamentales Konzepts programmatischer Funktionen werden Strukturen dargestellt, die dadurch entstehen, dass Mengen in Verbindung mit dazugehörigen Abbildungen D → Z gesehen werden. Derartige Strukturen bilden die Grundlage praktisch aller mathematischen Disziplinen. Eine interessante Übersicht über die vielfältigen Bedeutungen des Funktionsbegriffs sind zusammengestellt in einem Wikipedia Eintrag : https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)

Ableitungen

Die Differential- bzw. Differenzialrechnung ist ein wesentlicher Bestandteil der Analysis und damit ein Gebiet der Mathematik. Zentrales Thema der Differentialrechnung ist die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen.

In vielen Fällen ist die Differentialrechnung ein unverzichtbares Hilfsmittel zur Bildung von mathematischen Modellen, welche die Wirklichkeit möglichst genau abbilden sollen, sowie zu deren nachfolgender Analyse. Die Entsprechung der Ableitung im untersuchten Sachverhalt ist häufig die momentane Änderungsrate. So ist beispielsweise die Ableitung der Orts- bzw. Weg-Zeit-Funktion eines Teilchens nach der Zeit seine Momentangeschwindigkeit und die Ableitung der Momentangeschwindigkeit nach der Zeit liefert die momentane Beschleunigung.

Interessante Aspekte über das Rechnen mit Differenzen und Differentialen sind zusammengestellt in einem Wikipedia-Eintrag:
https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung

Integrale

Die Integralrechnung ist neben der Differentialrechnung der wichtigste Zweig der mathematischen Disziplin der Analysis. Sie ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Das Integral ist ein Oberbegriff für das unbestimmte und das bestimmte Integral. Die Berechnung von Integralen heißt Integration. Eine interessante Übersicht über die Bedeutung von Integralen ist zusammengestellt in einem Wikipedia-Eintrag: https://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung

Denken in Abläufen

Die meisten Problemsituationen, die in späteren beruflichen Situationen (auch in vielen alltäglichen Lebenssituationen) auftreten, betreffen Abläufe (Prozesse), deren Verständnis logisch stimmige Denkweisen erfordert**.** Auch für komplexe Fragestellungen, die mit direkten mathematischen Verfahren nicht zu 'bewältigen' sind, bleiben viele Möglichkeiten, systematische Aspekte einer betrachteten Situation mittels programmatischer Überlegungen zu erfassen und zu bearbeiten.

Näherungsverfahren

Um einen Näherungswert für eine Wurzel zu erhalten, kann man mehrere Verfahren anwenden. Das Newton-Verfahren (benannt nach Sir Isaac Newton 1669) ist ein Standardverfahren zur numerischen Lösung von nichtlinearen Gleichungen und Gleichungssystemen. Das Verfahren beruht auf fortlaufenden Wiederholungen (Iterationen) einer vereinfachten Rechenvorschrift, die solange fortgesetzt wird, bis nachfolgende Änderungen in der Näherungslösung zur gewünschten Genauigkeit nichts mehr beitragen (eine festgesetzte Schranke unterschritten haben).

Die Entwicklung eines einfachen Computerprogramms zur Berechnung der Quadratwurzel oder/und Kubikwurzel einer beliebigen Zahl hat das Potential, Schülern ein befriedigendes Mathe-Erlebnis zu bereiten. Eine interessante Übersicht über die Bedeutung des Newton-Verfahren bietet Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren

Der genetische Code

Es ist ungewöhnlich, einen grundlegenden biologischen Prozess als Beispiel mathematisch relevanter Überlegungen zu betrachten. Das ist jedoch insofern angebracht, als es sich bei dem Begriff 'genetischer Code' um die Eigenschaft eines biologischen Prozesses handelt, der genauso als Programm aufgefasst werden kann wie ein Programm zu einer mathematischen Berechnung. Der genetische Code ist ist bei allen bekannten Arten von Lebewesen in den Grundzügen gleich. Er ordnet einem Triplett von drei aufeinanderfolgenden Makromolekülen (Nukleobasen der Nukleinsäuren – einem sogenannten Codon) jeweils ein anderes bestimmtes Makromolekül (eine proteinogene Aminosäure) zu.

Der Mathematiker und Physiker Douglas Hofstadter hat in seinem Buch „Metamagicum“ die Rolle des genetischen Codes im Rahmen der Proteinsynthese beschrieben. Das entsprechende Kapitel hat die Überschrift „ Der genetische Code: Zufällig?“. Für mathematisch Interessierte ist es beeindruckend, wie Hofstadter einen biologischen Prozess mit abstrakten, formalen Mitteln darstellt.

Quantenelektrodynamik (QED)

Dem theoretischen Physiker Richard Feynman ist es mit einer Vorlesung sogar gelungen, mathematisch Interessierten ein wichtiges Prinzip der Quantentheorie näher zu bringen, ohne dass er die komplexen Gleichungen der Quantenmechanik verwendete. Feynman hatte sich bereit erklärt, eine Gedächtnisvorlesung zu Ehren der verstorbenen Alix G. Mautner zu halten. „Alix und Richard kannten sich ungefähr 22 Jahre. Seit langem schon lag ihm Alix in den Ohren, eine für sie und andere Nichtphysiker verständliche Erklärung der Teilchenphysik zu entwickeln.“ (Leonard Mautner, Mai 1983).

Feynman erklärt, dass die Aufsummierung (Aneinanderreihung) aller möglichen Zustandsvektoren des Lichts in einer gegeben Situation genau zu den einfachen optischen Regeln führt, die wir in der Schule gelernt haben. Zum Beispiel die Regeln über Spiegel- oder Linseneffekte. Eine tolle Überraschung!

Der Vorlesungstext kann in Feynmans Büchlein „QED – Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie“ auch heute noch 'genossen' werden.

In einigen Fällen gehen Physiker mit theoretischen Überlegungen zu weit. Wenn sie bei physikalischen Arbeitshypothesen lediglich auf mathematische Schlüssigkeit achten, aber nicht sicherstellen, dass ihre Hypothesen auch empirisch (experimentell) verifiziert werden können. Es soll sogar Physiker geben, die annehmen, dass alle Ereignisse und Zustände der Natur berechenbar seien. Die Natur ist wesentlich komplexer, der 'liebe Gott' ist kein Mathematiker.

Lust auf etwas?

Schulunterricht ermöglicht keine tiefgreifenden Studien. Im Schulunterricht kann bestenfalls Interesse an Themen aufkommen. Es kommt also darauf an, den Schulunterricht so zu gestalten, dass die **Lust an** sorgfältig ausgewählten programmatischen Überlegungen geweckt und aufrecht erhalten wird. Ein wesentlicher Aspekt des Erlernens programmatischer Verfahren sind Übungen, die vom Lernenden selbstständig ausgeführt werden können.

Motivierende Aspekte des Lernens lassen sich gut an der Entwicklung eines selbstgeschriebenen Computerprogramms verdeutlichen. Das Erlernen einer Programmiersprache (analog zum Erlernen eines mathematischen Verfahrens) bietet wenig Anreiz, Lust daran zu empfinden. Erst die Ausführung eines selbstgeschriebenen Programms auf einem Computer ist emotional befriedigend. Wenn sich nämlich herausstellt, dass der Computer genau das macht, was man sich vorgestellt und programmiert hat. Man kann sich gewissermaßen seine eigenen Gedankengänge nachträglich 'anschauen'. Weniger befriedigend aber sehr aufschlussreich ist, wenn ein Computerprogramm nicht der beabsichtigten Vorstellung entspricht oder gar Fehler enthält. Eigene Fehler, die man selber mit Hilfe eines Computer feststellt und selber korrigieren kann, haben ebenfalls einen positiven persönlichen Lerneffekt.

Letztlich werden sich Jugendliche später selbstgewählten Bereichen widmen, denen sie mit **Lust auf** Entdeckungen nachgehen möchten.

Postskriptum

In der Natur gibt es keine geometrischen Strukturen mit ganzzahligen Dimensionen 0 (Punkt), 1 (Linie), 2 (Fläche) oder 3 (Körper). Der Mathematiker Benoît Mandelbrot hat für natürliche Strukturen den Begriff 'Fraktal' geprägt („Die fraktale Geometrie der Natur“). Natürliche Strukturen haben gebrochene Dimensionen (https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal).

Die aufgeführten Wikipedia Einträge sind kein Lehrmaterial. Sie dienen lediglich dazu, mathematisch Interessierten mathematische Ansätze zu verdeutlichen.